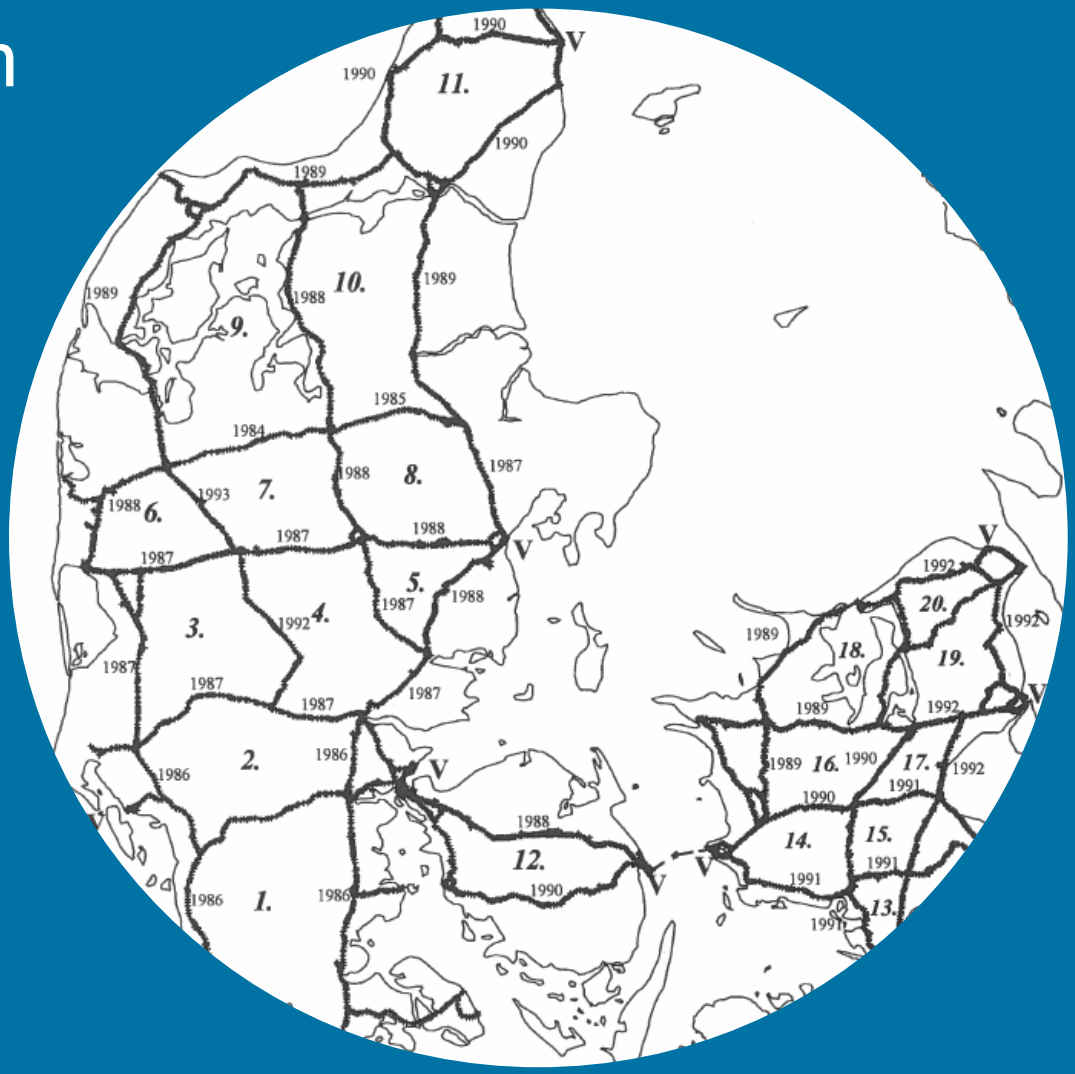
Klimadatastyrelsen

DVR90: Dansk Vertikal Reference 1990



Geodætisk Systembeskrivelse

Geomatics Notes 10
Version 3
2025-05-01

Geomatics Notes 10. Version 3, 2025-05-01

Geodætisk Systembeskrivelse:

DVR90: Dansk Vertikal Reference 1990

Forside: Linjerne i det 3. præcisionsnivellement.

Udarbejdet af: Stefan Krebs Lange-Willman, KDS

The *Geomatics Notes Series* is published by Klimadatastyrelsen/Agency for Climate Data (KDS), Copenhagen, Denmark.

The publications in this series include working papers and preliminary reports from ongoing projects.

Hence, results and conclusions reported may be tentative and subject to change. Opinions expressed do not necessarily reflect the position of KDS.

Copyright by the Agency for Climate Data and the author(s). This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Indhold

DVR90: Dansk Vertikal Reference 1990 **3**

Systemdefinition **3**

Realiseringer af DVR90 **4**
- Højdenettet . . . 5
- DVR90(2002) . . . 5
- DVR90(2013) . . . 5
- DVR90(2023) . . . 5

Om geoiden **5**
- Geoidetilpasning . . . 6

Dækningsområde **7**

Transformationer **7**
- Transformation til EVRS . . . 7
- Transformation fra tidligere højdesystemer . . . 8

Geodætiske registre **8**

Governance **9**

Licens **9**

A Gravimetrisk geoide **10**

B Geoidetilpasning **12**

Litteratur **18**

DVR90: Dansk Vertikal Reference 1990

Det anbefalede *højdereferencesystem* til lands i Danmark er DVR90. DVR90 er defineret som en referenceflade der svarer til middelvandstanden omkring Danmark i 1990 og DVR90 koter er derfor populært sagt højden over havet. I praksis er DVR90 dog defineret ved koten for fikspunktet i Aarhus Domkirke, som er fastsat til 5,570 m. På grund af sin definerende natur kaldes dette for et *fundamentalpunkt*.

DVR90 bygger på det landsdækkende 3. præcisionsnivellement, som blev udført fra 1980 og frem til starten af 1990'erne (*Schmidt*, 2000). Man fulgte stort set de gamle præcisionslinjer fra 1. præcisionsnivellement (1885–1905) og 2. præcisionsnivellement (1938–1953). Hele opmålingsnettet blev tilsluttet DMI's vandstandsmålere og med udgangspunkt i middelvandstanden ved alle målere blev højdeobservationerne udjævnet så en ny kote for fundamentalpunktet i Aarhus Domkirke (G.M.902) kunne beregnes til 5,570 m. DVR90-koter er i princippet gyldige fra 2000-01-01 og en glidende overgang sørgede for at de fleste kommuner og andre offentlige myndigheder havde implementeret systemet pr. 2005-01-01 (*Bahl*, 2006).

Systemdefinition

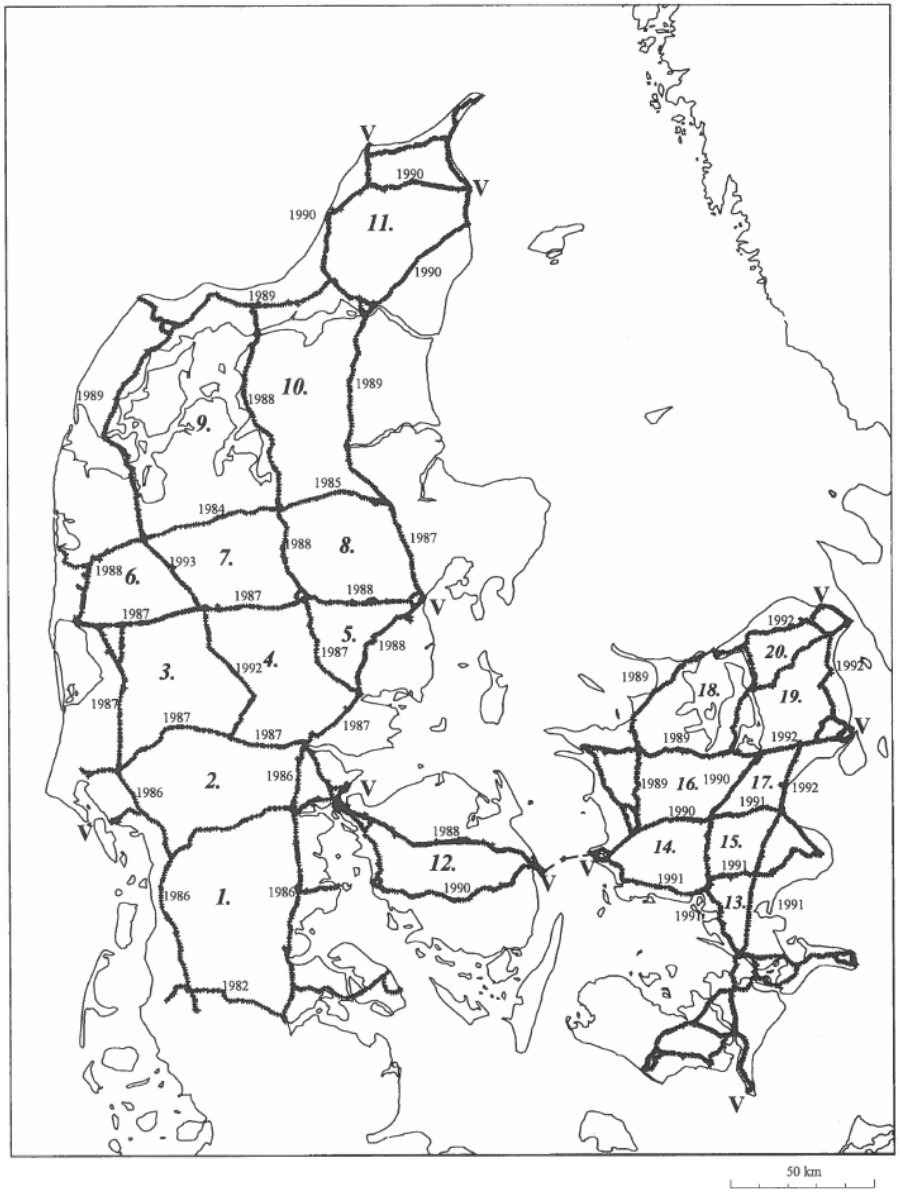
DVR90 er defineret som et *tidefrit*[1] højdesystem der angiver *ortometriske Helmert højder*[2] over middelvandstanden i Danmark i 1990.

Middelvandstanden er bestemt ved 10 vandstandsmålere fordelt over landet igennem lineær regression over den tidekorrigerede vandstand for perioden 1893–1993. Ved fastholdelse af den gamle DNN[3] kote for fundamentalpunktet på 5,615 m, opnåede man ved udjævning af 3. præcisionsnivellement et sæt DNN koter for de 10 definerende vandstandsmålere. Det

[1] Begrebet tidefrit betyder at alle tideeffekter er fratrukket, herunder både de periodiske variationer (halvdaglige, daglige, månedlige, årlige osv.) og den permanente deformation af Jorden og dens tyngdefelt.

[2] *Ortometriske højder* er højder målt langs lodlinjen fra målepunktet til geoiden, hvor tangenten til lodlinjen er i tyngdekraftens retning. Ortometriske højder er derfor afhængige af undergrundens densitet. Dette har i et fladt land som Danmark ikke betydning i praksis.

[3] Dansk Normal Nul, forgængeren for DVR90.



Figur 1: Linjerne i det 3. præcisionsnivellement (*Schmidt*, 2000).

vægtede gennemsnit af disse 10 koter blev bestemt til 4,5 cm som derefter blev fratrukket fundamentalpunktets gamle DNN kote for at opnå den nye DVR90 kote på 5,570 m. De nye DVR90 koter for middelvandstanden ved de enkelte vandstandsmålere ses i Tabel 1.

Station	DVR90 kote [cm]
Esbjerg	4,6
Fredericia	-0,4
Frederikshavn	-6,0
Gedser	5,2
Hirtshals	-7,9
Hornbæk	0,1
Korsør	2,6
København	4,1
Slipshavn	0,0
Århus	-1,0

Tabel 1: Koter for vandstanden ved de 10 definerende vandstandsmålere i 1990 (*Schmidt* (2000), tabel 92). Bemærk, at koterne ikke har 0 som gennemsnit, idet der er taget højde for tidekræfternes permanente deformation af Jorden, som afhænger af stationernes breddegrader (for detaljer, se *Schmidt* (2000), app. 10)

Da højdesystemet afspejler højden over havet som det stod i 1990, vil højdesystemet med tiden blive mindre aktuelt. Det skyldes at havniveauet ændres, dels på grund af klimapåvirkninger, dels på grund af landhævning efter seneste istid. Derfor vil der på sigt opstå et behov for at redefinere højdesystemet.

Realiseringer af DVR90

Et reference*system* gøres praktisk anvendeligt (”realiseres”) gennem en reference*ramme*. Traditionelt realiseres højdesystemer gennem en beregning (”udjævning”) af alle observationer i det definerende nivellement. Udjævningens resultat er koter for alle observerede punkter. Da præcisionsnivellementspunkterne er få, og oftest svært tilgængelige, kan realiseringen fortættes ved at etablere mere tilgængelige punkter, hvor behov findes, og knytte disse punkter (tilsammen kendt som ”detailnet”) til referencerammen ved kortere nivellementer til de nærmeste punkter i præcisionsnettet. Tilsammen udgør præcisionsnettet og detailnettene en *nivellementsbaseret realisering* af DVR90.

Derudover realiseres DVR90 også af en række geoidemodeller, som bruges til at transformere GNSS-opmålte ellipsoidehøjder til DVR90-koter. Geoidemodellerne udarbejdes i samarbejde med DTU Space og bygger på en *gravimetrisk* geoidemodel, som derefter tilpasses DVR90. Modellerne kaldes derfor for *tilpassede geoidemodeller* eller blot *geoidemodeller*. Geoidemodellerne afspejler afstanden fra den ellipsoide som udgør ETRS89-systemets nulflade, og den tilpassede gravimetriske geoide. De opdateres i takt med at nye observationer gør det muligt at forbedre enten tilpasningen, den gravimetriske geoidemodel, eller den bagvedliggende realisering af ETRS89. En oversigt over de eksisterende DVR90-realiseringer ses i Tabel 2.

Realisering	Type	Transformationsfil
DVR90(2000)	Højdenet	—
DVR90(2002)	Geoidemodel	`dvr90_2002.tif`
DVR90(2013)	Geoidemodel	`dvr90_2013.tif`
DVR90(2023)	Geoidemodel	`dvr90_2023.tif`

Tabel 2: Realiseringer af DVR90. Transformationsfiler kan downloades fra KDS' ftp server (find link på styrelsens webside).

Nøjagtighedsestimater på de tilpassede geoidemodeller ses i Tabel 3, og beskrives yderligere i det følgende.

	σ_{res}	r_{min}	r_{max}
DVR90(2002)	9 mm	-31 mm	29 mm
DVR90(2013)	6 mm	-21 mm	35 mm
DVR90(2023)	4,4 mm	-13 mm	19 mm

Tabel 3: Standardafvigelser og min/max værdier for residualer ved geoidetilpasninger. (*Forsberg, R.*, 2002, 2012, 2013).

Højdenettet

Rygraden i højdenettet udgøres af linjerne i det 3. præcisionsnivellement, se Figur 1. Herfra fortættes højdenettet af et hierarki af stadigt mere fintmaskede net. Således bliver de ca. 3 000 fikspunkter der udgør 3. præcisionsnivellement, bredt ud til de godt 70 000 punkter som totalt set udgør højdenettet (*Kort- & Matrikelstyrelsen*, 2012).

Nøjagtigheden af en kote i højdenettet er svær at kvantificere. Præcisionsnivellement er den mest præcise nivellementsmetode, og som tommelfingerregel er nøjagtigheden bedre, jo tættere et punkt er på præcisionsnetværket.

Derudover vil kvaliteten af et højdenet med tiden forringes i takt med at terrænet generelt set ændrer sig eller at fikspunkter går tabt eller sætter sig, hvorfor de tilknyttede koter vil være fejlagtige. Derfor er det en løbende prioritet at højdenettet vedligeholdes. Enten i form af genopmåling af eksisterende punkter eller ved etablering og indmåling af nye punkter (jf. KDS' Strategi for geodætisk infrastruktur (*SDFI*, 2017)) Dette vedligehold forestås af KDS, og finansieres delvist af brugerne af højdenettet, primært kommunerne.

DVR90(2002)

Ved tilpasningen af DVR90(2002) anvendte man 416 tilpasningspunkter med forskellig tæthed. Bornholm var tættest dækket, efterfulgt af Sjælland. Fyn og Jylland var mindre tæt dækket, med fokus på punkter omkring Odense, Århus og Aalborg, samt hele vejen langs den jyske vestkyst. Den underliggende gravimetriske geoidemodel er baseret på den fællesnordiske standardgeoidemodel NKG96, som blev suppleret med yderligere tyngdedata i og omkring Danmark – særligt luftbårne data fra de indre danske farvande og Østersøen (*Forsberg, R.*, 2002).

Den endelige model var forskudt -19 mm i forhold til den gravimetriske geoidemodels nulpunkt og havde en estimeret nøjagtighed på 9 mm.

DVR90(2013)

Geoidemodellen DVR90(2013) så en udvidelse i antallet af tilpasningspunkter, samt en mere jævn punktfordeling. I alt blev anvendt 720 punkter, primært bestående af punkterne i KDS' 10-km net og permanente GNSS-stationer. Den anvendte gravimetriske geoidemodel var baseret på den globalt dækkende model EGM2008, som blev forbedret med data fra GOCE-satellitten samt nordiske tyngdekampagner (*Forsberg, R.*, 2012).

Anvendelsen af den globale gravimetriske geoidemodel førte til, at nulpunktsforskydningen mellem gravimetrisk og tilpasset geoidemodel var på 28,8 cm. Dette kan forstås som højdeforskellen imellem det globale havniveau og det lokale havniveau omkring Danmark. Nøjagtigheden af DVR90(2013) blev igennem residualanalyse estimeret til 6 mm.

DVR90(2023)

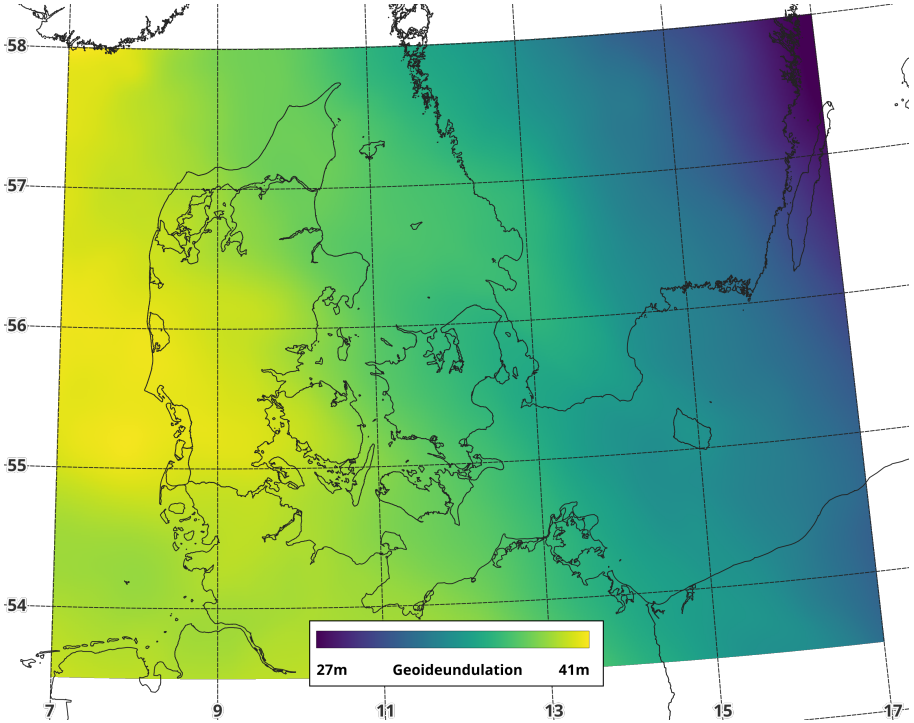
Ved den seneste geoidetilpasning, DVR90(2023), anvendte man en ny tilgang til udvælgelsen af tilpasningspunkter. Man brugte langt færre punkter, navnlig 143 af de såkaldte *5D-punkter*, men til gengæld var koten og højden over ellipsoiden opmålt med højere nøjagtighed. Den anvendte gravimetriske geoidemodel, PGM2017, var igen globalt dækkende (detaljer ses i Bilag A) og blev udvidet med danske tyngdedata, se Figur 2.

Forskydningen mellem gravimetrisk og tilpasset geoidemodel var på 32,05 cm. Bornholm ligger desuden yderligere forskudt med ca. 14 cm.

Nøjagtigheden af DVR90(2023) er estimeret til 4,4 mm. Yderligere detaljer om den tilpassede geoidemodel DVR90(2023) ses i Bilag B.

Om geoiden

Geoiden er den form, verdenshavene vil have, hvis de udelukkende er påvirket af jordens tyngdefelt og rotation. Man ser altså bort fra vind, temperatur, ferskvand og havstrømmes påvirkning af havoverfladen. Geoidens udstrækning begrænser sig dog ikke til jordens vanddækkede områder men er derimod globalt dækkende. Eftersom geoiden ligger meget tæt på det



Figur 2: Gravimetrisk geoide 2023

faktiske havniveau udgør den en god reference for måling af koter på land, der netop er en tilnærmet måde at afspejle højden over havet.

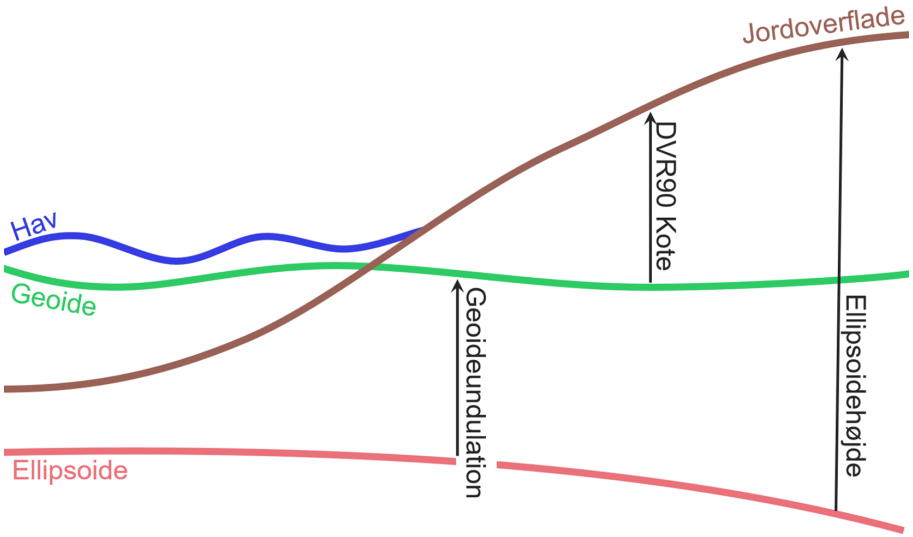
Geoiden er en gravimetrisk ækvipotentialflade, som bestemmes ud fra globale målinger af jordens tyngdefelt. Globale geoidemodeller repræsenteres matematisk af et sæt koefficienter til kuglefunktioner, dvs. basisfunktioner, der er særligt egnede til at beskrive variationer på en kugleflade.[4]

Den danske geoidemodel defineres med udgangspunkt i en global geoidemodel, som forfines med danske tyngdedata i høj rumlig opløsning. Den består af et grid af *geoideundulationer*, som er højdeforskelle mellem geoiden og ellipsoiden (se Figur 3). Den danske gravimetriske geoidemodel er udarbejdet af DTU Space, og anvendes af KDS som grundlag for den tilpassede geoidemodel. Se Bilag A for yderligere detaljer om den gravimetriske geoidemodel.

[4] se ICGEM's hjemmeside for download og visualisering af globale tyngdemodeller.

Geoidetilpasning

Forrige afsnit beskrev hvordan en global gravimetrisk geoidemodel danner grundlag for en lokal dansk gravimetrisk geoidemodel, som derefter tilpasses DVR90. Denne tilpasning er nødvendig, idet de gravimetriske modeller er baseret på det uforstyrrede globale havniveau hvorimod nulpunktet for DVR90 følger det lokale havniveau som inkluderer tidsmidlede effekter af bl.a. vind, havstrømme, temperatur og salinitet.



Figur 3: Fortegnet overblik over vertikale referenceflader.

Tilpasningen er baseret på den generelle relation i Ligning 4, som udledes af Figur 3.

$$H_{\mathrm{DVR90}} = h_{\mathrm{GNSS}} - N \tag{1}$$

hvor H_{DVR90} er DVR90-koten, h_{GNSS} er den GNSS-opmålte højde over ellipsoiden og N er geoideundulationen. I en række tilpasningspunkter

jævnt fordelt i landet observeres både en ellipsoidehøjde og en DVR90 kote, og vi benævner i disse punkter den "observerede" geoide $N_{\text{obs}} = h_{\text{GNSS}} - H_{\text{DVR90}}$. Den observede geoide kaldes sommetider også for den "GNSS-nivellerede" geoide. Det søges med tilpasningen at definere en matematisk model som repræsenterer forskellen mellem den observerede geoide og den gravimetriske geoidemodel:

$$\Delta N = N_{\text{obs}} - N_{\text{grav}} \tag{2}$$

hvor ΔN er den søgte tilpasningsfunktion og N_{grav} er den gravimetriske geoidemodel.

Yderligere detaljer om geoidetilpasning, estimater på usikkerhed og sammenligninger af nuværende og tidligere geoidemodeller er givet i Bilag B.

Dækningsområde

DVR90 er et højdereferencesystem til bestemmelse af koter på land eller i umiddelbar nærhed deraf. Derfor er DVR90 i udgangspunktet kun gældende for danske landområder med fikspunkter tilknyttet en DVR90 kote, herunder alle øerne. For at kunne dække dette område er geoidemodellerne defineret i et ækviangulært grid. Den aktuelle geoidemodel går fra 53.5°–58° N og 7°–17° Ø, se Figur 2. Dvs. at geoidemodellerne også dækker havområder samt dele af Sverige, Tyskland og Polen. Da geoidemodellerne ikke er tilpasset i disse områder skal gridværdier her ses som rent regnetekniske elementer. For referenceflader i de danske farvande anbefales DKLAT og DKMSL.

Transformationer

De aktuelle geoidebaserede realiseringer af DVR90 er som nævnt givet ved geoideundulationen som er geoidens højde over ellipsoiden. En geoidemodels værdi i et punkt med koordinater (ϕ,λ) bestemmes ved hjælp af bilineær interpolation i griddet, som derefter udgør en direkte transformation mellem DVR90-koten, H_{DVR90}, og højden h over ellipsoiden (ETRS89). Transformationer til andre højdesystemer kan derefter foretages via h.

Transformationer mellem de forskellige realiseringer af DVR90 kan foretages med udgangspunkt i Ligning 4. Eksempelvis transformeres koten i realiseringen DVR90(2013) til den tilsvarende kote i seneste realisering DVR(2023) via Ligning 3. Dette kan igen ses som en transformation til h og derefter til koten i den nye realisering.

$$H_{\text{DVR90(2023)}} = H_{\text{DVR90(2013)}} - (N_{\text{DVR90(2023)}} - N_{\text{DVR90(2013)}}) \tag{3}$$

Implementeringer af transformationer til og fra realiseringer af DVR90, kan i praksis kontrolleres med testdatasættene i Tabel 4 og Tabel 5. Ved anvendelse af en given geoidemodel, skulle man gerne kunne transformere højderne i Tabel 4 til de tilsvarende koter angivet i Tabel 5.

Station	λ [°]	ϕ [°]	h_{GNSS} [m]
Buddinge	12,50001	55,73901	94,0158
Korsør	11,14208	55,32498	46,9030
Rangstrup	9,18666	55,12343	124,2230
Vestervig	8,31746	56,77248	67,4610
Silkeborg	9,49609	56,17320	119,5100
Hjørring	10,02914	57,45110	62,6280

Tabel 4: Stationer med koordinater og tilhørende ellipsoidehøjder.

Station	H_{2002} [m]	N_{2002} [m]	H_{2013} [m]	N_{2013} [m]	H_{2023} [m]	N_{2023} [m]
Buddinge	57,8937	36,1221	57,8948	36,1210	57,8936	36,1222
Korsør	8,7105	38,1925	8,7135	38,1895	8,6999	38,2031
Rangstrup	83,5620	40,6610	83,5623	40,6607	83,5599	40,6631
Vestervig	27,4037	40,0573	27,3882	40,0728	27,3810	40,0800
Silkeborg	79,4108	40,0992	79,4326	40,0774	79,4300	40,0800
Hjørring	24,4057	38,2223	24,4045	38,2235	24,3954	38,2326

Tabel 5: Stationer med tilhørende koter og geoideundulationer for geoidemodellerne der i øjeblikket distribueres af KDS.

Transformation til EVRS

Det fælles-europæiske højdesystem European Vertical Reference System (EVRS) kan med fordel bruges i tilfælde hvor, der arbejdes på tværs af

landegrænser i Europa. EVRS sikrer homogenitet af koter på tværs af hele Europa. Den seneste realisering af EVRS er EVRF2019. Transformation af DVR90-koter til EVRF2019 udføres ved hjælp af et transformationsgrid, der modellerer forskellene mellem de to systemer. En EVRF2019-kote fås ved at lægge gridværdien, G, til DVR90-koten:

$$H_{\text{EVRS2019}} = H_{\text{DVR90}} + G \tag{4}$$

Horisontale koordinater i griddet er givet i ETRS89, og værdier mellem griddets knudepunkter aflæses ved hjælp af bilineær interpolation.

EVRF2019 findes i to udgaver: Zero-tide og mean-tide. Typisk vil man bruge zero-tide udgaven, men til visse formål kan mean-tide udgaven af EVRF2019 finde anvendelse. I tabel 6 ses eksempler på koter transformeret fra DVR90 til de to udgaver af EVRF2019.

Breddegrad	Længdegrad	DVR90	$\text{EVRF2019}_{\text{zero}}$	$\text{EVRF2019}_{\text{mean}}$
57,02788889°N	8,62630556°E	100,000 m	100,007 m	100,030 m
55,29850000°N	12,34277778°E	100,000 m	100.008 m	100,023 m

Tabel 6: Eksempler på koter i henholdsvis DVR90, EVRF2019 zero-tide og EVRF2019 mean-tide.

Transformationsfiler kan downloades via styrelsens webside.

Transformation fra tidligere højdesystemer

DVR90 erstattede det forældede Dansk Normal Nul (DNN), og alle koter blev genberegnet i det nye system. Derfor er der ikke nogen ligetil måde at transformere imellem de to systemer. Dog blev der beregnet en gennemsnitlig koteændring af fikspunkterne inden for hver kommune. En liste over disse koteændringer er publiceret i Vejledning om højdesystemet og er således den officielle transformation imellem DNN og DVR90.

Geodætiske registre

Højdesystemet DVR90 og alle dets realiseringer er registreret i EPSG-databasen. En oversigt over de eksisterende EPSG-koder relateret til DVR90 kan ses i Tabel 7.

Kode	Navn	Datumtype
EPSG:5799	DVR90 kote	Ensemble
EPSG:10482	DVR90(2000)	Vertikalt (højdenet)
EPSG:10483	DVR90(2002)	Vertikalt (geoidemodel)
EPSG:10484	DVR90(2013)	Vertikalt (geoidemodel)
EPSG:10485	DVR90(2023)	Vertikalt (geoidemodel)
EPSG:10486	ETRS89 + DVR90(2002)	Kombineret
EPSG:10487	ETRS89 + DVR90(2013)	Kombineret
EPSG:10488	ETRS89 + DVR90(2023)	Kombineret
EPSG:4097	DKTM1 + DVR90 kote	Kombineret
EPSG:4098	DKTM2 + DVR90 kote	Kombineret
EPSG:4099	DKTM3 + DVR90 kote	Kombineret
EPSG:4100	DKTM4 + DVR90 kote	Kombineret
EPSG:7416	UTM32N + DVR90 kote	Kombineret
EPSG:7417	UTM33N + DVR90 kote	Kombineret
EPSG:7418	Kp2000 Jylland + DVR90 kote	Kombineret
EPSG:7419	Kp2000 Sjælland + DVR90 kote	Kombineret
EPSG:7420	Kp2000 Bornholm + DVR90 kote	Kombineret

Tabel 7: EPSG-koder relateret til DVR90.

Overordnet kan man anvende koden EPSG:5799 til at markere DVR90 koter som har en uspecificeret realisering, dvs. hvad enten de er bestemt via højdenettet eller en geoidemodel. Denne kode markerer i EPSG-termer et såkaldt datumensemble og repræsenterer altså samlingen af alle DVR90 realiseringerne.

Ønskes en højere nøjagtighed kan man med fordel benytte koderne EPSG:10482-10485 til at specificere hvilken realisering af DVR90 som er brugt til kotebestemmelsen. Dette muliggør desuden transformation imellem nuværende og fremtidige realiseringer af DVR90.

Derudover findes også en række kombinerede koordinatsystemer, som

kombinerer DVR90 med et 2D koordinatsystem såsom UTM32N.

Governance

KDS er myndighed for geodæsi, og dermed for DVR90. Så KDS er ansvarlig for valg af nyrealiseringer. Ved beslutning om nyrealisering inddrages holdninger fra først og fremmest relevante myndigheder og fra aktører i kort- og landmålingsbranchen. I øvrigt er alle interessenter velkomne til at bidrage med relevant information om eventuelle fejl og mangler via grf@kds.dk.

Licens

Denne systembeskrivelse kan frit videredistribueres som dokumentation under CC-BY 4.0 (*Creative Commons*, 2013).

Realiseringer af systemet licenseres jævnfør hver enkelt realiserings betingelser. Der lægges ved udvælgelsen af nyrealiseringer vægt på at kunne publicere det relevante materiale i overensstemmelse med EU-kommisionens "Public Sector Information Directive" (*Council of the European Union*, 2019).

Bilag A

Gravimetrisk geoide

Rene Forsberg, Hergeir Teitsson, Gabriel Strykowski – DTU Space
Kristian Keller – SDFI

Baggrund

Styrelsen for Dataforsyning og Infrastruktur (SDFI) har i de senere år revideret de danske GNSS-koordinater og DVR90 koter, og samtidig er der siden den sidste officielle geoidemodel for Danmark, DVR90(2013) foretaget mange nye tyngdemålinger samt check af ældre tyngdedata, både ved landmålinger, marine og flybårne målinger. Alle disse målinger er foretaget som led i ydelsesaftalen mellem DTU Space og SDFI. Der er hermed kommet et meget bedre tyngdemæssigt grundlag for den underliggende gravimetriske geoidemodel (baseret på tyngde- og satellit målinger), og den GNSS-tilpassede DVR90-geoidemodel.

Den nye geoidetilpasning til DVR90 er foretaget baseret på relationen

$$H_{\mathrm{DVR90}} = h_{\mathrm{GNSS}} - N \tag{A.1}$$

hvor h_{GNSS} er GNSS ellipsoidehøjden, H_{DVR90} den nivellerede højde i DVR90, og N geoideundulationen. Tilpasningen er udført således, at der fra de opgivne koter og ellipsoidehøjder er fundet "GNSS geoidehøjder"

$$N_{\mathrm{GNSS}} = h_{\mathrm{GNSS}} - H_{\mathrm{DVR90}} \tag{A.2}$$

og der er herefter lavet en model for differencen

$$\epsilon = N_{\mathrm{gravimetrisk}} - N_{\mathrm{GNSS}} \tag{A.3}$$

Denne difference er modelleret med et *bias* og et *residualt signal* bestemt med *mindste kvadraters kollokation*. Der er til kollokationen brugt en 2. ordens Markov-model med korrelationslængde 60 km og a priori standardafvigelse af GNSS-geoidehøjder på minimum 5 mm, svarende til tidligere tilpasning af DVR90(2013), men med væsentligt færre, og mere nøjagtige N_{GNSS} værdier.

Den gravimetriske geoidemodel

Den ny gravimetriske geoidemodel er beregnet ved hjælp af sfærisk Fourier-transformation, som implementeret i GRAVSOFT, med brug af PGM2017-kuglefunktionsmodellen, en ikke-offentliggjort model fra NGA (National Geospatial-Intelligence Agency). PGM2017 er en forløber for den forsinkede globale EGM2022 model, komplet til grad og orden 1960, svarende til 5' opløsning. Denne model er baseret på state-of-the-art satellitdata (GRACE og GOCE), samt offentlige og fortrolige data over hele jorden. Geoiden er forfinet med de eksisterende og nye tyngdedata i Danmark, det nordisk/baltiske område og nærtliggende lande (Polen, Rusland og Tyskland); nyere tilsvarende modeller som f.eks. XGM2019 har vist et

marginalt dårligere fit til GNSS data. Nye tyngdemålinger i forhold til de tidligere danske tyngdemålinger omfatter bl.a.

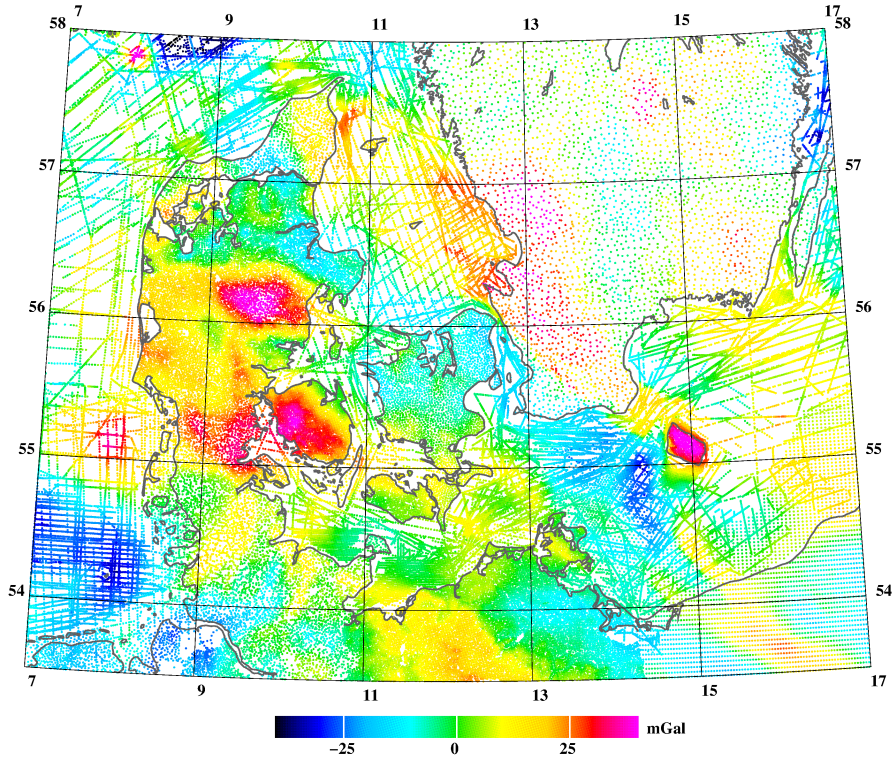
- Marine målinger i de indre danske farvande (i samarbejde med Geodatastyrelsen)
- Flybårne tyngdemålinger (Kattegat 2018, i samarbejde med Lantmäteriet, Sverige, Indre farvande og Vestkysten 2019-2020, samarbejde med University of Darmstadt og tyske BKG
- Nye landmålinger til "fill-in" af datadækningshuller og QC (bl.a. Vadehavet, Orø, sydfynske øhav, vestkysten, nye havneudfyldninger i København og Århus mv.)
- Nye tyske, svenske og polske marine data fra EU-FAMOS projektet

Et plot over de nye tyngdedata er vist i Figur 4. I forhold til FAMOS-geoidemodellen er der tilføjet et ældre tysk survey med dækning i sydlige Storebælt og Lillebælt, samt indsat et ældre dansk survey NØ for Bornholm, efter redigering af enkelte outliers. Nogle ældre marine linjer ud for Ringkøbing og SV for Falster er slettet. Der er stadig en del småproblemer i de marine data, så her vil fortsatte moderne marine målinger være en stor hjælp til fremtidig forbedring af den marine del af geoidemodellen (dog med mindre betydning for land).

Den gravimetriske geoidemodel er beregnet ved "remove-restore" metoden, med brug af sfærisk Fourier-transformation, uden brug af digitale terrænmodeller (test viste ingen signifikant forskel mellem brug/ikke brug af DEM's i det danske område).

Statistik for reduktionen af tyngdedata, relativt til PGM2017, er vist i Tabel 8. Dette bekræfter den gode kvalitet af de danske tyngdedata.

Det skal bemærkes at den gravimetriske geoidemodel er givet i et globalt højdesystem, medens den GNSS-tilpassede geoide per definition er et lokalt system – DVR90 – bestemt ved middelvandstand omkring Danmark 1990, overført til Århus. Forskellen er ca. 31 cm.



Figur 4: Tyngdedatas dækning for GRAVGEOID2023. Flybårne data er alene brugt over havet, for at undgå formindsket opløsning pga. den filtrering, som er nødvendig i flybåren (og marin) gravimetri.

Tyngdeanomali data	Land- og marine tyngdedata	Flybårne data
Orig. data middel	2,27	1,11
Orig. data std.afv.	13,9	13,30
-PGM2017 middel	0,07	-0,02
-PGM2017 std.afv.	4,14	4,15
Antal data punkter	73160	8646

Tabel 8: Statistik for reduktion af tyngdedata med PGM2017, med korrektion for atmosfære (mgal)

Bilag B

Geoidetilpasning

Om teorien

Tilpasningen af geoiden består i at bestemme hvordan fladen givet ved

$$\Delta N = N_{\text{obs}} - N_{\text{grav}} \tag{B.1}$$

ser ud, hvor N_{obs} er geoiden observeret vha. nivellement og GNSS-opmåling, og N_{grav} er den gravimetriske geoidemodel. Metoderne til at udføre dette er mange, men der anvendes i geodæsien traditionelt metoden *mindste kvadraters kollokation*. Kollokation er en interpolationsmetode, hvor man anvender en *kovariansfunktion* til at bestemme værdien i prædiktionspunkterne ud fra en samling af kendte punkter. Kovariansfunktionen beskriver hvordan to punkter er korreleret typisk som funktion af afstanden.

Som med mange andre geostatistiske metoder (f.eks. kriging), antages at den modellerede størrelse er *stationær* over et bestemt rumligt domæne. Dvs. at det antages at sandsynlighedsfordelingen, herunder specielt dens forventningsværdi og varians, er identisk overalt. Derfor er første skridt i geoidetilpasningen at sikre denne stationaritet ved at fratrække en *trendfunktion* $t(x)$. I Danmark er geoidehældningen dog så svag at vi kan nøjes ned at fratrække et konstant bias $t(x) = b$ der findes ved at tage gennemsnittet af ΔN, hvorved signalets forventningsværdi bliver $\mathrm{E}(\Delta N) = 0$.

Det resterende signal modelleres med kovariansfunktionen $C(x, y) = C(r)$, som antages kun at afhænge af afstanden r mellem punkterne x og y (isotropisk kovarians). Erfaringen har vist, at det er nyttigt at vælge en kovariansfunktion af formen beskrevet af *Kasper* (1971):

$$C(x, y) = C(r) = C_0 \left(1 + \frac{r}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{-r/\alpha} \tag{B.2}$$

hvor C_0 er variansen og α er en karakteristisk korrelationslængde. Halveringslængden er givet ved $\alpha_{1/2} = \alpha/0,595$. I praksis tunes $\alpha_{1/2}$ efter hvad der giver det bedste resultat og et estimat af støjniveauet σ^2_{min} bruges som minimumsværdi for C_0. Ud fra kovariansfunktionen kan kovariansmatricen opbygges:

$$\mathbf{C}_{\mathrm{X,Y}} = \begin{bmatrix} C(x_1, y_1) & C(x_1, y_2) & \dots & C(x_1, y_q) \\ C(x_2, y_1) & C(x_2, y_2) & \dots & C(x_2, y_q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(x_p, y_1) & C(x_p, y_2) & \dots & C(x_p, y_q) \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

hvor $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \dots & x_p \end{bmatrix}$ hhv. $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1, & y_2, & \dots & y_q \end{bmatrix}$ er samlinger af p og q antal punkter. Derefter kan ΔN prædikteres ved

$$(\Delta \mathbf{N}_0 - b) = \mathbf{C}^T_{0,\mathrm{X}} \mathbf{C}^{-1}_{\mathrm{X,X}} (\Delta \mathbf{N} - b) \tag{B.4}$$

hvor matricen $\Delta \mathbf{N}_0$ indeholder prædiktionerne, matricen $\mathbf{C}_{0,\mathrm{X}}$ er kovariansmatricen mellem prædiktions- og obervationspunkter, og $\mathbf{C}_{\mathrm{X,X}}$ er autokovariansmatricen for observationspunkterne. Endelig indeholder $\Delta \mathbf{N}$ observationerne.

Om metoden

Programpakken GRAVSOFT (*Forsberg, R. and Tscherning, C. C.*, 2014) består af en lang række programmer til udførelse af geodætiske opgaver. KDS anvender GRAVSOFT-programmet `fitgeoid`, der indeholder funktionalitet til tilpasning (fitting) af geoiden, med basis i ovenstående teori. Programmet giver mulighed for at variere parametrene i kovariansfunktionen samt for anvendelse af forskellige typer af trendfunktion. Det primære output af programmet er den tilpassede geoidemodel i GRAVSOFTs grid-format. Dette kan konverteres med programmet `gdal_translate` til GeoTIFF-format, der så er det endelige produkt af geoidetilpasningen.

Fremgangsmåden i `fitgeoid` er skitseret i det følgende:

1. Foretag bilineær interpolation af N^g_{grav} for at opnå N^o_{grav} i observationspunkterne. Bemærk at der i denne sammenhæng benyttes et hævet g og o for at betegne værdier givet i grid- hhv. observationspunkter.
2. Beregn tilpasningsmodellen $\Delta N^o = N^o_{\text{obs}} - N^o_{\text{grav}}$
3. Træk trendfunktion fra ΔN^o og estimér den empiriske varians $\hat{C}_0$. Sæt $C_0 = \max(\hat{C}_0,\, \sigma^2_{\text{min}})$.
4. Bestem kovariansmatricerne $\mathbf{C}_{0,\text{X}}$ og $\mathbf{C}_{\text{X,X}}$. Prædiktionspunkterne anvendt i $\mathbf{C}_{0,\text{X}}$ kan vælges frit – vi benytter samme punkter som udgør griddet i N^g_{grav}.
5. Beregn ΔN^g_0 ud fra Ligning B.4.
6. Den tilpassede geoidemodel er nu $N^g_{\text{tilp}} = N^g_{\text{grav}} + \Delta N^g_0$

For nærmere detaljer om algoritmerne henvises til GRAVSOFT manualen. Geoidemodellen bruges herefter som udgangspunkt for en bilineær interpolation til at finde værdien af N_{tilp} et hvilket som helst sted.

Usikkerheden på modellen vurderes ud fra residualerne af tilpasningen, som udregnes ved at interpolere N^g_{tilp} til de oprindelige observationspunkter og beregne residualerne:

$$r = N^o_{\text{tilp}} - N^o_{\text{obs}} \tag{B.5}$$

Parametervalg

Det er i tilpasningen nødvendigt at foretage en vurdering af det optimale valg af trendfunktion, halveringslængde $\alpha_{1/2}$ og nedre grænse for variansen σ^2_{min}. En lignende vurdering er gjort af *Bilker-Koivula* (2010) efter indførelsen af det finske højdesystem N2000. Her testes kollokationen med to forskellige trendfunktioner (et konstant bias og et tiltet plan), samt forskellige værdier af $\alpha_{1/2}$ og støjniveau. Sammenligningen af alle disse parametre blev gjort igennem krydsvalideringsmetoden *Leave-One-Out* (LOOCV), som beror på at udelade et enkelt datapunkt fra det oprindelige datasæt, estimere en ny model og vurdere den fittede models evne til at prædiktere det udeladte punkt.

Bilker-Koivula (2010) konkluderer at et konstant bias er optimalt, samt at jo lavere $\alpha_{1/2}$ og σ^2_{min} jo mindre bliver residualerne også. Dog viser LOO-analysen at der opnås en balance ved højere korrelationslængde og støjniveau hvor modellens prædiktive egenskaber optimeres, idet man reducerer graden af overfitting.

Ud fra en lignende analyse er der ved den nyeste geoidetilpasning i Danmark valgt et konstant bias som estimeres ved middelværdien af ΔN_{obs}. Desuden er der valgt $\alpha_{1/2} = 60$ km og $\sigma_{\text{min}} = 5$ mm. Udover antagelsen om støjniveauet σ_{min}, er der foretaget estimater af variansen af inputdata på baggrund af GNSS-tidsserier og kvaliteten af nivellementsdata. Disse variansestimater erstatter diagonalelementerne i autokovariansmatricen $\mathbf{C}_{\text{X,X}}$.

Realisering	Trend	$\alpha_{1/2}$ [km]	σ_{min} [mm]	Antal punkter
DVR90(2002)	Bias	50	10	416
DVR90(2013)	Bias	50	10	720
DVR90(2023)	Bias	60	5	143

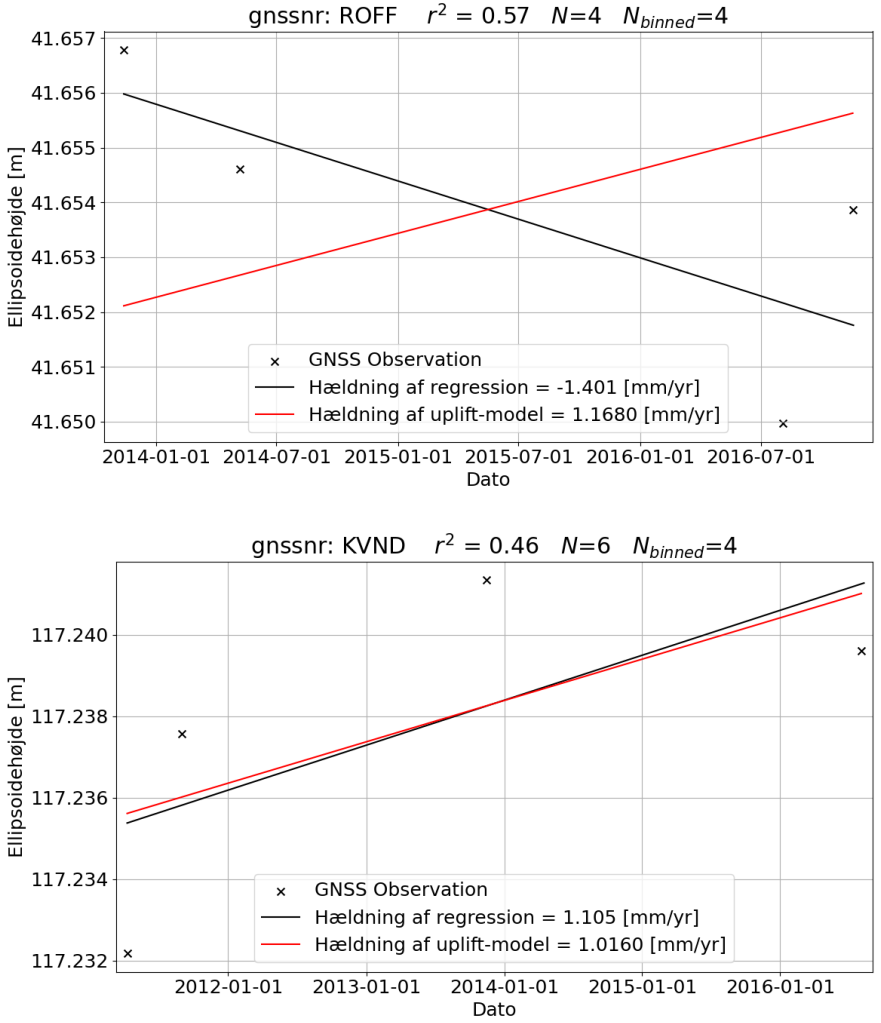
Tabel 9: Parametre anvendt i geoidetilpasningerne (*Forsberg, R.*, 2002, 2012, 2013)

Punkter anvendt i DVR90(2023)

Ved den forrige geoidetilpasning, DVR90(2013), blev der anvendt punkter fra KDS' 10 km-net. 10 km-nettet er oprindeligt et GNSS referencenet som også er blevet opmålt med nivellement og tildelt DVR90 koter. Dog kan det konstateres, at stabiliteten af mange af 10-km punkterne er for ringe til at leve op til de krav KDS har sat for den seneste geoidetilpasning i 2023. Af denne grund er der i DVR90(2023) anvendt de såkaldte *5D-punkter*, som er 1,5 m lange skruepløkke etableret med toppen under jorden og beskyttet med en betonring netop til højpræcisionsformål (*SDFI*, 2017).

5D-punkterne er for det meste placeret langs de oprindelige præcisionslinjer, som har været brugt til de 3 danske præcisionsnivellementer og så tæt som muligt på de oprindelige underjordiske og mest stabile punktgrupper. På den måde er DVR90-koten sikret en høj nøjagtighed. Udover at blive målt med nivellement bliver 5D-punkterne målt med GNSS i 3 døgn ca. hvert 3. år og på den måde bestemmes højden over ellipsoiden meget mere nøjagtigt end 10-km nettets fikspunkter.

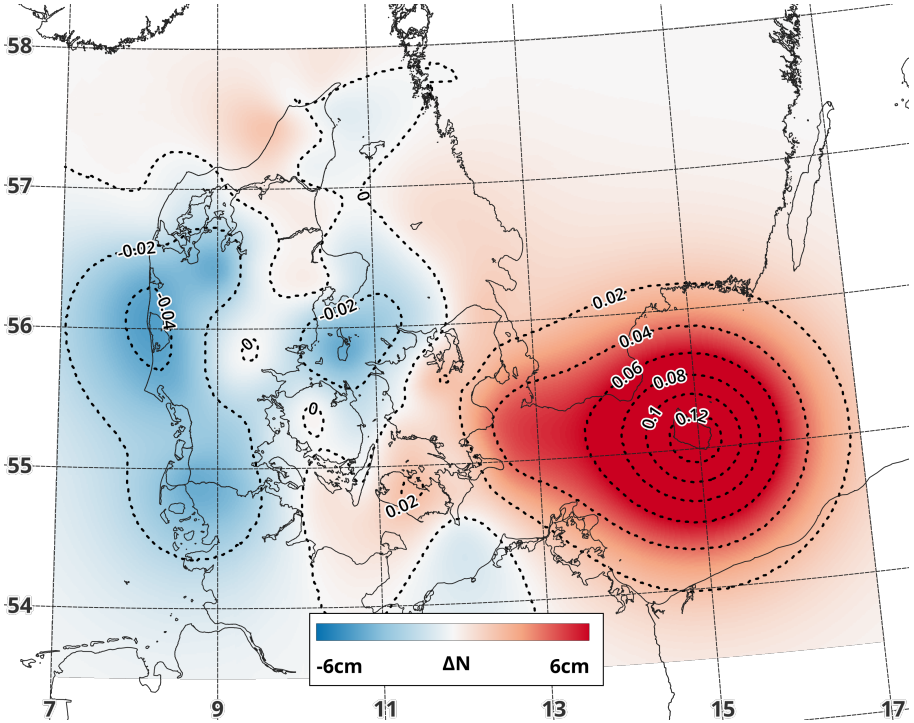
Trods 5D-punkternes generelt bedre stabilitet kan de stadig sætte sig. Derfor har en vigtig opgave været udvælgelsen af egnede data og ikke mindst frasorteringen af uegnede data. Krydsvalidering har dannet basis for at detektere outliers, hvorefter analyse af outlier-punkternes tidsserier og punktgrupper kan afsløre sætninger eller andre uregelmæssigheder. Som eksempel på dette ses i Figur 5, hvordan 5D-punktet ROFF har en faldende trend og KVND har en stigende trend. Kun den sidste stemmer overens med en landhævningsreferencemodel. På baggrund af disse figurer fortolkes ROFF som synkende og dermed ustabilt, mens KVND fortolkes som værende i overensstemmelse med det forventede, og dermed stabilt. Derfor udelukkes ROFF fra geoidetilpasningen, hvorimod KVND inkluderes.



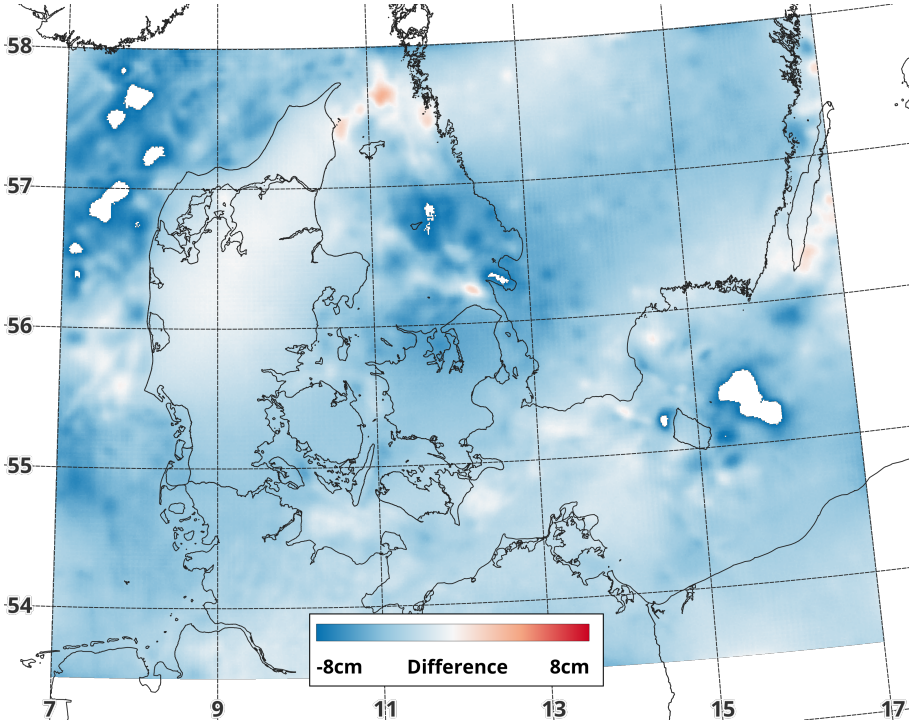
Figur 5: Eksempler på tidsserier fra 5D-punkterne ROFF (Nyborg) og KVND (Kværndrup).

DVR90(2023) i forhold til forrige tilpasning

Figur 6 viser fittet til fladen ΔN fratrukket trendfunktionen. I det meste af Danmark ses variationer fra -4,5 cm ved Hvide Sande i vest til +4 cm ved Amager, Stevns Klint og Møns Klint.



Figur 6: Plot af tilpasningsfladen ΔN fratrukket bias på 32,05 cm. Bemærk at farveskalaen går fra $\pm$6 cm for at fremhæve de små variationer, mens geoidemodellen over Bornholm tilpasses med op til 14 cm.



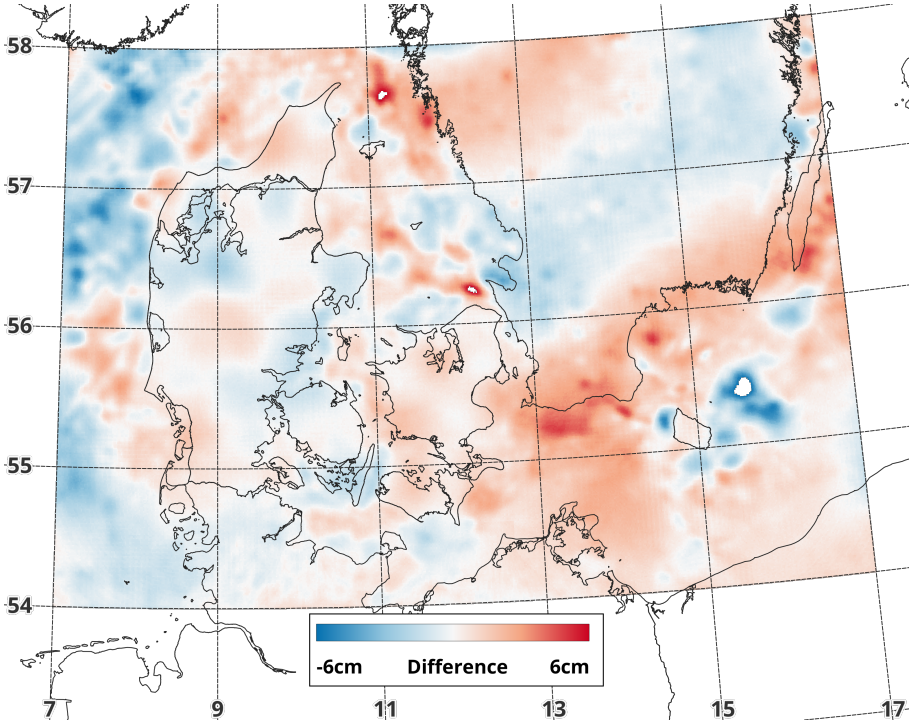
Figur 7: Differencen $N_{\text{gravgeoid2023}} - N_{\text{gravgeoid2013}}$ mellem de to seneste gravimetriske geoidemodeller.

Bornholm skiller sig ud med en værdi på op til 13,3 cm. Idet DVR90 på Bornholm (og de andre øer som ikke er forbundet med nivellement) er defineret ud fra den lokale middelvandstand, fortolkes dette som havtopografien der udgør forskellen på den gravimetriske geoide og den lokale middelvandstand. Andre steder i landet kan forskellen enten skyldes fejl i nivellement, GNSS-højden eller i den gravimetriske geoide.

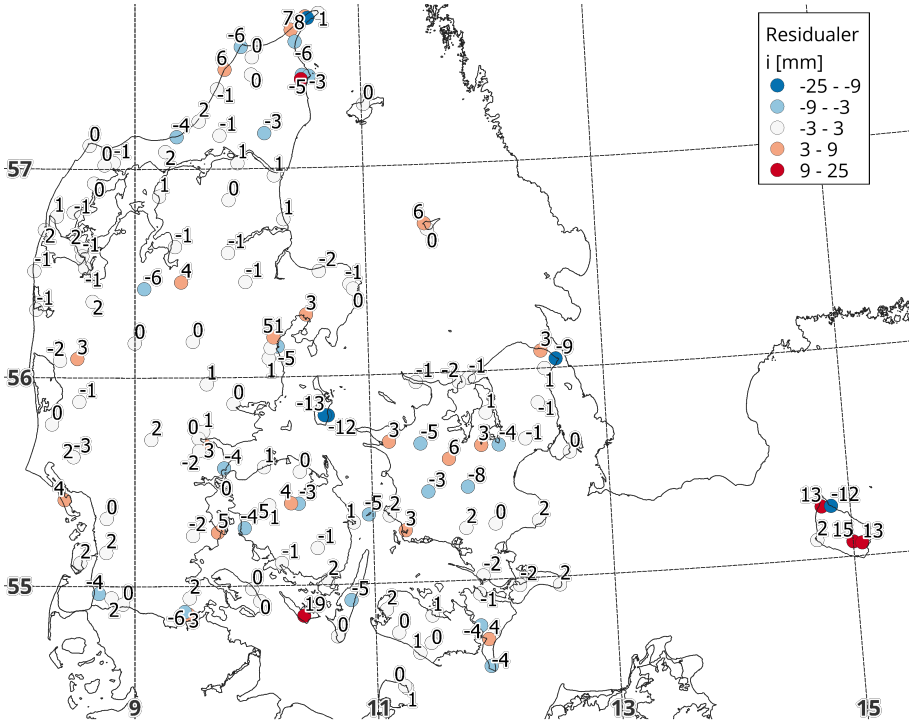
Som forklaret i Bilag A, er der primært tilføjet ny tyngdedata fra marine kampagner eller flybårne kampagner over vand. Dette genkendes i Figur 7 hvor forskellen mellem den gravimetriske geoide anvendt i 2013 og 2023 er vist. De største ændringer ses til havs, hvor områder uden for skalaen er filtreret fra øst for Bornholm og nordvest for Hanstholm. Derudover ses det at store dele af Jylland er tæt på uændret og resten af Danmark har kun små ændringer, størst i den nordlige halvdel af Sjælland på omkring 5 cm.

I Figur 8 vises forskellen mellem geoidemodellerne af 2023 og 2013 – dette er altså den koteændring man i praksis vil opnå ved transformation fra DVR90(2013) til DVR90(2023). Til havs og uden for Danmark genkendes de samme mønstre som i Figur 7. Dette skyldes at geoiden ikke tilpasses her, så det eneste der kan give anledning til ændringer i geoidemodellen er ændringerne i den gravimetriske geoide.

Over land ligger alle ændringer i intervallet $\pm$2 cm med undtagelse af om-



Figur 8: Differencen $N_{\text{DVR90(2023)}} - N_{\text{DVR90(2013)}}$ mellem de to seneste tilpassede geoidemodeller.



Figur 9: Residualer for geoidemodellen DVR90(2023). Enheden er [mm]

rådet omkring Sjørup mellem Holstebro og Viborg, som har ændringer op til 2,5 cm.

Et plot af residualerne kan ses i Figur 9. Residualerne har en standardafvigelse på $\sigma_{\text{res}} = 4{,}4$ mm, se oversigt i Tabel 10. Det ses at i nogle områder findes relativt store residualer med modsat fortegn tæt på hinanden, ved eksempelvis Skagen, Helsingør og Bornholm. Disse forskelle tydeliggør fejlkilderne i den observerede geoide idet valget af korrelationslængden $\alpha_{1/2} = 60$ km, ikke tillader tilpasningsmodellen at "absorbere" store forskelle på så kort afstand. Disse fejlkilder tolkes som regel som værende grundet ustabile punkter, men kan også skyldes den generelle måleusikkerhed ved nivellement og GNSS-opmåling. Andre steder i landet med længere imellem punkter kan der lige så vel være fejl, men disse absorberes i højere grad af tilpasningsmodellen.

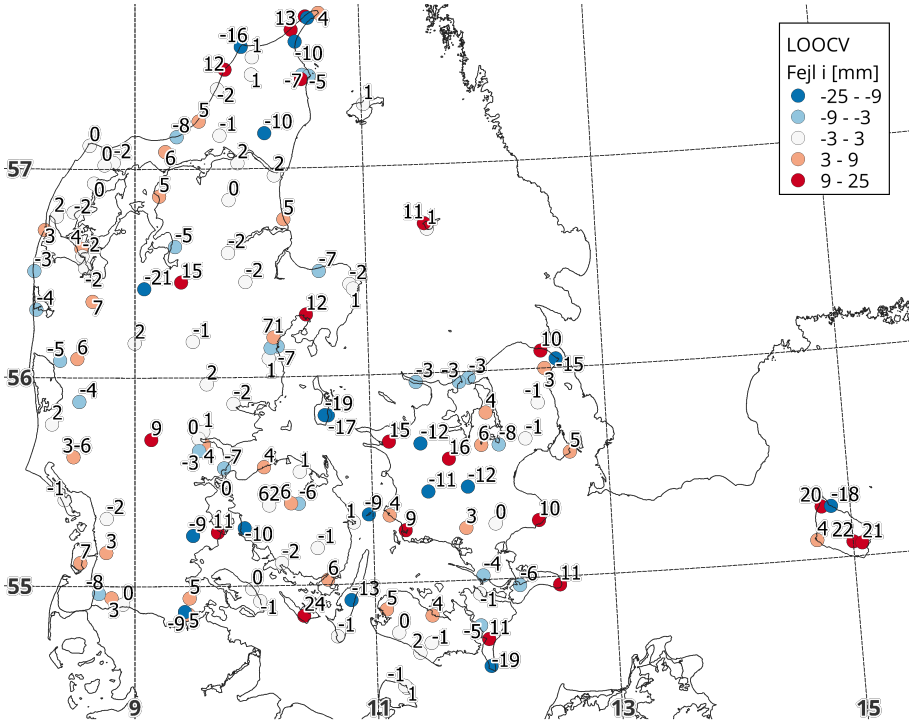
Standardafvigelse	Med øer	Uden øer
Residualer [mm]	4,4	3,1
LOOCV [mm]	8,1	7,0

Tabel 10: Resultater af residualanalyse og krydsvalidering.

Der ses for øerne Ærø og Samsø ligeledes store residualer, der som beskrevet ovenfor ikke absorberes af tilpasningsmodellen grundet deres relativt tætte placering på andre punkter. Ærø og Samsø er ligesom Bornholm ikke forbundet til resten af nivellementsnettet og DVR90 er derfor igen defi-

neret ud fra lokal middelvandstand. Derfor tolkes afvigelserne som grundet denne forskel i middelvandstand.

Figur 10 viser resultaterne af LOO-krydsvalideringen. De samme tendenser som beskrevet ovenfor går forstærket igen. Områder med større variation såsom midt/vestsjælland og området ved Sjørup træder frem.



Figur 10: LOOCV residualer for geoidemodellen DVR90(2023). Enheden er [mm].

Litteratur

Bahl, L., *Implementation of New Reference Systems in Denmark*, Kort- og Matrikelstyrelsen, 2006. (document)

Bilker-Koivula, M., Development of the Finnish height conversion surface FIN2005N00, *Nordic journal of surveying and real estate research*, *7*(1), 2010. B

Council of the European Union, Council regulation (EU) no 2019/1024, 2019. (document)

Creative Commons, Attribution 4.0 International (CC BY 4.0), 2013. (document)

Forsberg, R., *DKGEOID02 – En ny dansk præcisionsgeoide tilpasset DVR90*, Kort- og Matrikelstyrelsen, Intern rapport, 2002. 3, (document), 9

Forsberg, R., *(Endnu en) ny dansk geoide DKGEOID12A – fra tyngdedata, GOCE og GPS*, DTU Space, Intern rapport, 2012. 3, (document), 9

Forsberg, R., *DKGEOID13A og DKGEOID13B*, DTU Space, Intern rapport, 2013. 3, 9

Forsberg, R., and Tscherning, C. C., *An overview manual for the GRAVSOFT Geodetic Gravity Field Modelling Programs*, DTU Space & Niels Bohr Instituttet, 3 ed., 2014. B

Kasper, J. F., A second-order Markov Gravity Anomaly Model, *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, *76*(32), 7844–7849, doi:https://doi.org/10.1029/JB076i032p07844, 1971. B

Kort- & Matrikelstyrelsen, Referencenet for Danmark: Status, strategi og udvikling, 2012. (document)

Schmidt, K., *The Danish Height system DVR90*, *4*, vol. 8, Kort- & Matrikelstyrelsen, 2000. (document), 1, 1

SDFI, Strategi for Danmarks geodætiske infrastruktur 2015-2025, https://sdfi.dk/Media/638102441948537479/004-Geod-Strategi.pdf, SDFI, Geodætisk systembeskrivelse, GeoNote 4, 2017. (document), B

SDFI, DKLAT: Referenceflade for laveste astronomiske tidevand i og omkring Danmark, https://sdfi.dk/Media/638167943651552271/007-DKLAT.pdf, SDFI, Geodætisk systembeskrivelse, GeoNote 7, 2023a. (document)

SDFI, DKMSL: Referenceflade for middel havniveau i og omkring Danmark, https://sdfi.dk/Media/638167943870892273/008-DKMSL.pdf, SDFI, Geodætisk systembeskrivelse, GeoNote 8, 2023b. (document)

Klimadatastyrelsen

Sankt Kjelds Plads 11
2100 København Ø

https://www.kds.dk